Fluidi viscosi newtoniani

I fluidi che trattiamo godono delle seguenti proprietà:

- $\mathbb{T}$ è funzione continua di $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}=f(\mathbb{D})$. $\mathbb{T}$ non dipende esplicitamente da $\underline{x}$, ma solo attraverso $\mathbb{D}$ (omogeneità);
- non esistono direzioni preferenziali di comportamento del fluido (isotropia);
- se $\mathbb{D}=0 \Rightarrow \mathbb{T}=-p\mathbb{I}$ (idrostatica);
- linearità del legame costitutivo.

Il nostro obiettivo è quello - tipico dell'ingegneria - di trovare la risposta del fluido alle sollecitazioni, ovvero la relazione che intercorre tra $\mathbb{T}$ e $\mathbb{D}$. Con le ipotesi viste possiamo enunciare (senza dimostrarla) la forma fondamentale seguente:

$$T_{ij}=\left(-p+\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}+2\mu D_{ij} \quad \text{ovvero} \quad \mathbb{T}=(-p+\lambda\,\nabla\cdot\underline{v})\mathbb{I}+2\mu\mathbb{D}$$

In cui p è la pressione, λ la viscosità di volume, μ la viscosità dinamica, $\nu=\mu/\rho$ la viscosità cinematica. μ controlla l'intensità della risposta di reazione del fluido alla velocità di deformazione, ν la velocità con cui gli effetti viscosi si propagano nel fluido.

Nel caso di fluido incomprimibile e indilatabile, per cui $\rho=\text{cost}$, si ha:

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{=0}+\nabla\cdot(\rho\,\underline{v})=0 \Rightarrow \rho\,\nabla\cdot\underline{v}=0 \Rightarrow \mathbb{T}=-p\,\mathbb{I}+2\mu\mathbb{D}$$

Le equazioni di Navier - Stokes

Sostituiamo T_{ij} del legame costitutivo nell'equazione di Cauchy:

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\rho f_i+\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}=\rho f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p+\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]=$$

$$=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{se } \mu=\text{cost}$$

Considerando che $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)$, con $\lambda=\text{cost}$ (oltre a $\mu=\text{cost}$):

$$\rho\frac{dv_i}{dt}=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

divergenza della pressione — gradiente della divergenza — laplaciano

In forma vettoriale:

$$\rho\frac{d\underline{v}}{dt}=\rho\,\underline{f}-\nabla p+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\underline{v})+\mu\,\nabla^2\underline{v}$$

Se $\rho=\text{cost} \Rightarrow \nabla\cdot\underline{v}=0$ e si ottengono le equazioni di Navier - Stokes:

$$\rho\frac{d\underline{v}}{dt}=\rho\,\underline{f}-\nabla p+\mu\nabla^2\underline{v} \quad \text{ovvero} \quad \rho\frac{dv_i}{dt}=\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

Essendo $\rho=\text{cost}$, cioè indipendente dalle grandezze termodinamiche (ad esempio la distribuzione di temperatura) si ricava direttamente $\underline{t}=\mathbb{T}\cdot\underline{n}=(-p\mathbb{I}+2\mu\mathbb{D})\cdot\underline{n}$, da cui $\underline{F}=\int_S\underline{t}\cdot dS$.

La vorticità

Riprendiamo le equazioni di Navier-Stokes:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \underline{f} - \nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \underline{v}$$

Concentriamoci ora sul termine $\nabla^2 \underline{v}$:

$$\nabla^2 \underline{v} = \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{v})$$

Per fluido incomprimibile $\nabla^2 \underline{v} = -\nabla \times (\nabla \times \underline{v}) = -\nabla \times \underline{\omega}$, avendo definito il prodotto vettoriale $\nabla \times \underline{v} = \underline{\omega}$, vorticità. Per i moti in cui $\underline{\omega} = 0$ si ottiene l'equazione di Eulero:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \underline{f} - \nabla p - \mu \underbrace{\nabla \times \underline{\omega}}_{=0} \Rightarrow \rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \underline{f} - \nabla p$$

Eseguiamo il prodotto vettoriale che ci consente di definire $\underline{\omega}$:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \underline{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \underline{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + \underline{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

L'informazione fornita da $\underline{\omega}$ non è dissimile da quella contenuta in $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. In altre parole $\underline{\omega}$ misura la velocità di rotazione delle particelle. In particolare è la media delle velocità di rotazione delle proiezioni sul piano (x_i, y_i) degli elementi lineari della stella di centro P.

L'equazione della vorticità si ottiene operando il rotore sull'equazione di Navier-Stokes. Notiamo anzitutto che il rotore del gradiente di uno scalare è nullo poiché le derivate miste si annullano:

$$\nabla \times (\nabla p) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} & \frac{\partial p}{\partial x_2} & \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_3 \partial x_2}\right) + \underline{j}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_3}\right) + \underline{k}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_1}\right) = 0$$

Pertanto l'applicazione del rotore all'equazione di Navier-Stokes causerà l'annullamento del termine di pressione e di quello gravitazionale (sostituendo a $\underline{f} = \underline{g}$ il gradiente del campo $\nabla \varphi$).

Riscriviamo inoltre $\frac{d\underline{v}}{dt}$ nel modo seguente:

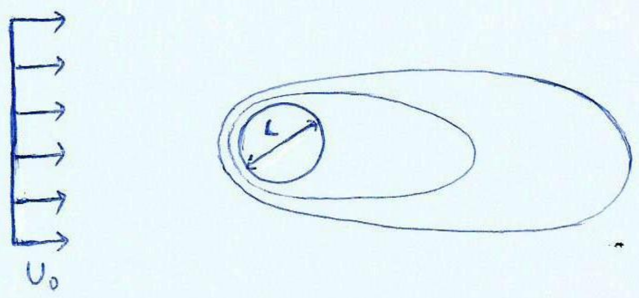
$$\rho\left[\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v}\right] = +\mu \nabla^2 \underline{v} \Rightarrow \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \nabla)\underline{v} = +\nu \nabla^2 \underline{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{\omega}}{dt} = (\underline{\omega} \cdot \nabla)\underline{v} + \nu \nabla^2 \underline{\omega}$$

Abbiamo ottenuto l'equazione della vorticità.

Numero di Reynolds - effetti convettivi e diffusivi

Consideriamo un cilindro investito da un fluido con velocità U_0:



Ordine di grandezza:

$\sigma(u) \sim \sigma(v) \sim U_0$

$\sigma(x) \sim \sigma(y) \sim L$

$\sigma(\omega) \sim \Omega$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma\left(u \dfrac{\partial \omega}{\partial x}\right) = U_0 \dfrac{\Omega}{L} \\ \sigma\left(v \dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right) = U_0 \dfrac{\Omega}{L} \\ \sigma\left(\nu \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right) = U_0 \dfrac{\Omega}{L^2} \end{cases}$$

Eseguendo il rapporto tra effetti convettivi e diffusivi:

$$\sigma = \left(\frac{u \frac{\partial \omega}{\partial x}}{\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}} \right) = \frac{U_0 \cdot \cancel{\Omega}/\cancel{L}}{\nu \, \cancel{\Omega}/L^{\cancel{2}}} = \frac{U_0 \cdot L}{\nu} = Re$$

Il numero di Reynolds distingue i casi in cui prevalgono gli effetti convettivi da quelli in cui prevalgono gli effetti diffusivi.

I pesci si muovono ad alti numeri di Reynolds ($Re_p = \frac{10^{-1} \cdot 10^{-1}}{10^{-6}} = 10^4$) e hanno forma idrodinamica. Con la pinna posteriore generano vortici alternati che danno il moto complessivo.

La generazione della vorticità

Riscriviamo l'equazione della vorticità nelle forme vettoriale e indiciale:

$$\rho \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \rho(\underline{v}\cdot\nabla)\underline{\omega} - \rho(\underline{\omega}\cdot\nabla)\underline{v} - \mu\nabla^2\underline{\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d\underline{\omega}}{dt} = (\underline{\omega}\cdot\nabla)\underline{v} + \nu\nabla^2\underline{\omega}$$

ovvero $$\frac{d\omega_i}{dt} = \omega_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_e \partial x_e}$$

Moltiplichiamo la forma indiciale per ω_i (ω_m a primo membro affinché si conservi la convenzione di Einstein):

$$\omega_m \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = \omega_i \cdot \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu\, \omega_i \cdot \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_e \partial x_e}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\omega_m \cdot \omega_m\right] = \omega_i \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\omega_i \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial x_e}\right] - \nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_e}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x_e}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\omega_m \cdot \omega_m\right] = \omega_i \omega_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{1}{2}\omega_i \cdot \omega_i\right)\right] - \nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_e}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x_e}$$

Integrando sul volume V:

$$\int_V \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\omega_m \cdot \omega_m\right] dV = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\omega_m \omega_m\, dV = \int_V \omega_i \omega_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV + \nu \int_V \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{1}{2}\omega_i \cdot \omega_i\right)\right] dV +$$
$$- \nu \int_V \frac{\partial \omega_i}{\partial x_e}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x_e} dV$$

In definitiva:

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\omega_m \cdot \omega_m\, dV = \int_V \omega_i \cdot \omega_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV + \nu \int_V \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{1}{2}\omega_i \omega_i\right)\right] dV - \nu \int_V \frac{\partial \omega_i}{\partial x_e}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x_e} dV$$

Esaminiamo il significato fisico di ogni termine integrale:

•) $-\nu \int_V \frac{\partial \omega_i}{\partial x_e}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x_e} dV$: dissipazione di vorticità per effetto viscoso (termine sempre negativo);

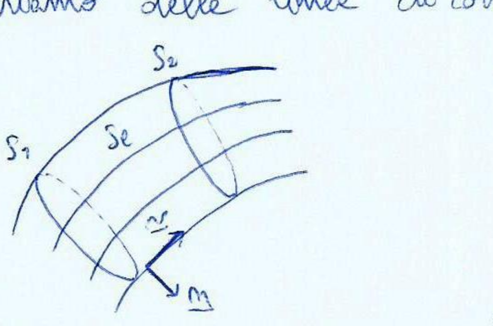
••) $\nu \int_V \frac{\partial}{\partial x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{1}{2}\omega_i \omega_i\right)\right] dV$: si può scrivere $\frac{\nu}{2}\int_V \nabla^2 \omega^2 dV = \frac{\nu}{2}\int_V \nabla\cdot(\nabla\omega^2) dV = \frac{\nu}{2}\int_S \underline{n}\cdot\nabla\omega^2 dS$, cioè esprimere una variazione di vorticità per effetto di flusso del gradiente del modulo di $\underline{\omega}$ stessa attraverso la superficie S di V. Questo termine non produce né dissipa $\underline{\omega}$ interna a V;

∴) $\int_V \omega_i \omega_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$: variazione della vorticità mediante deformazione di elementi materiali. È nullo se non c'è già presente vorticità nel volume, ovvero non è in grado di generarla.

Il primo membro c'è presente il contenuto di vorticità totale che varia per effetto dei tre termini a secondo membro. Dall'analisi svolta si deduce che la vorticità non può essere prodotta all'interno del volume V costituito da fluido incomprimibile e soggetto a campo di forze di massa conservative.

Circolazione, tubo vorticoso e tubo di flusso

Consideriamo delle linee di corrente definendo un tubo di flusso:

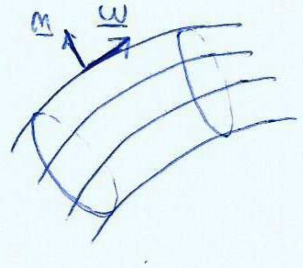


La velocità $\underline{v}$ è sempre tangente alle linee di corrente (la condizione di tangenza permette proprio di definire tali linee):

$$\int_V \nabla\cdot\underline{v}\,dV = \int_S \underline{v}\cdot\underline{n}\,dS = 0$$

L'integrale è esteso alla superficie totale della porzione del tubo evidenziata (delimitata appunto da S_1, S_2 e S_e).

Passiamo ora alle linee di vorticità che permettono di definire il tubo vorticoso:



In questo caso è la vorticità tangente alle linee. Abbiamo rappresentato un insieme di linee che si appoggiano a una curva chiusa C riducibile (in modo da racchiudere una superficie S tutta contenuta nella regione occupata dal fluido).

Definiamo ora la circolazione lungo la linea chiusa C che giace sul tubo vorticoso:

$$\Gamma = \oint_C \underline{v}\cdot d\underline{x} = \int_S \underline{\omega}\cdot\underline{n}\cdot dS$$

Nel contesto del tubo vorticoso la circolazione lungo una qualsiasi linea C chiusa e riducibile uguaglia il flusso di vorticità attraverso una qualsiasi superficie aperta delimitata da C stessa. Il flusso è anche detto "intensità del tubo vorticoso" ed è formato da tutte le linee di vorticità che si appoggiano a C.

Il teorema di Kelvin

Deriviamo rispetto al tempo l'equazione della circolazione

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_C v_i\,dx_i = \oint_C \frac{dv_i}{dt}\,dx_i + \oint_C v_i\,\frac{d(dx_i)}{dt}$$

Sostituiamo a $\frac{dv_i}{dt}$ l'equazione di Navier-Stokes con fluido incomprimibile e campo di forze conservativo ($f_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, cioè $\underline{f} = \nabla\varphi$):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C\left(f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_e\partial x_e}\right)dx_i + \oint_C v_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_e}\cdot dx_e =$$

$$= \oint_C\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}}_{=0} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}}_{=0} + \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_e\partial x_e}\right)dx_i + \underbrace{\cancel{\oint_C v_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_e}\cdot dx_e}}_{=0} = \nu\oint_C \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_e\partial x_e}\,dx_i$$

I termini che si annullano contengono differenziali esatti. Essi, integrati lungo una linea chiusa, danno zero. In generale si ottiene:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu\oint_C \nabla^2\underline{v}\,d\underline{x}$$

Se il fluido è ideale, cioè $\nu = 0$, si ha $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$. La circolazione rimane quindi costante nel tempo per fluido ideale, incomprimibile e soggetto a campo di forze conservativo.